



## **MESTRADO**

### **MATEMÁTICA FINANCEIRA**

## **TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

### **RELATÓRIO DE ESTÁGIO**

**ESTIMAÇÃO DA AVERSÃO AO RISCO ATRAVÉS DO CÁLCULO DA FUNÇÃO  
DENSIDADE DE PROBABILIDADE SUBJETIVA PARA O CASO DAS OPÇÕES  
DO PETRÓLEO**

**FILIPA MADEIRA LOPES ESTEVES CURTO**

**NOVEMBRO 2020**



## **MESTRADO**

### **MATEMÁTICA FINANCEIRA**

## **TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

### **RELATÓRIO DE ESTÁGIO**

**ESTIMAÇÃO DA AVERSÃO AO RISCO ATRAVÉS DO CÁLCULO DA FUNÇÃO  
DENSIDADE DE PROBABILIDADE SUBJETIVA PARA O CASO DAS OPÇÕES  
DO PETRÓLEO**

**FILIPA MADEIRA LOPES ESTEVES CURTO**

**Trabalho orientado por:**

**PROF. DR. JORGE BARROS LUÍS**

**MIGUEL FIGUEIREDO**

**NOVEMBRO 2020**

## Resumo

O petróleo simboliza uma das mais importantes *commodities* trocadas mundialmente, apresentando-se como a fonte primária de produção de energia. Este pode ser trocado pelo seu *spot price* ou pelo recurso a contratos de derivados financeiros, sendo a troca de opções de petróleo um exemplo do segundo tipo de investimento. O estudo desta variável revela-se pertinente para compreender o seu comportamento e estimar previsões possíveis. Tal estudo pode ser conduzido através de uma função densidade de probabilidade. A análise da função densidade de probabilidade *risk-neutral* urge, pelas suas falhas em abraçar todas as hipóteses representativas do investidor comum, o estudo de uma função densidade de probabilidade suavizada/subjetiva. Considerando apenas a função densidade de probabilidade *risk-neutral* para uma análise ao preço das opções de petróleo, assumir-se-ia que todos os investidores são indiferentes ao risco, independentemente da circunstância, ou seja, colocariam as suas decisões de investimento unicamente nos eventuais retornos associados a esse investimento. No entanto, tal não vai de encontro com a realidade, o que apela ao cálculo e análise dos valores de aversão ao risco dos investidores respeitantes à variável em estudo. Através do presente ensaio, consegue-se concluir que a aversão ao risco é bastante elevada em períodos de grande volatilidade e incerteza, e consideravelmente menor em períodos de maior estabilidade económica e financeira.

**Palavras-chave:** opções de petróleo, função densidade de probabilidade *risk-neutral*, função densidade de probabilidade subjetiva, aversão ao risco

## **Abstract**

Oil is considered to be one of the most important commodities traded worldwide and is deemed to be the primary source in energy production. It can be traded for its spot price or by using a financial derivatives contract, being oil option trading an example of the second type of investment mentioned. The study of this variable is relevant in order to comprehend its behaviour and estimate possible forecasts. Said study can be conducted through a probability density function. The analysis of a risk-neutral probability density function requires, because of its flaws in embracing all the hypothesis that portray the common investor, the study of a smoothed/subjective probability density function. Considering only a risk-neutral probability density function for the analysis of oil option prices, it would be assuming all investors are indifferent to risk, whichever the circumstance, which means they would place their investment decisions solely on the possible outcomes associated with that investment. However, that does not meet reality, which calls for the computation and analysis of the investors risk aversion's values with respect to the variable at play. From the present essay, it is possible to conclude that risk aversion is rather high in periods of great volatility and uncertainty, and considerably smaller in periods of greater economic and financial stability.

**Keywords:** oil options, risk-neutral probability density function, subjective probability density function, risk aversion

## Índice

1. Introdução.....	1
2. Asseco .....	3
2.1. Grupo Asseco.....	3
2.2. Asseco PST ( <i>Portuguese Speaking Territories</i> ).....	4
2.3. Relatório de Estágio .....	5
3. Revisão Bibliográfica .....	8
3.1. Contextualização Histórica.....	8
3.2. Opções e Futuros .....	12
3.2.1. Opções.....	12
3.2.2. Futuros.....	15
3.3. A Troca de Opções de Petróleo .....	16
3.4. Função Densidade de Probabilidade <i>Risk-Neutral</i> e Função Densidade de Probabilidade Subjetiva.....	18
3.5. Aversão ao Risco.....	20
4. Apresentação da Metodologia.....	23
5. Análise dos Resultados .....	24
6. Conclusão .....	31
Referências Bibliográficas .....	33
Apêndice.....	36

## 1. Introdução

O presente relatório de estágio é o resultado de um programa de estágio de quatrocentas horas na empresa Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*), no departamento de Desenvolvimento de Produto – Mercados Financeiros.

A Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) é uma empresa de software, especializada no desenvolvimento de soluções tecnológicas para instituições financeiras. Dedicar-se, maioritariamente, às atividades de investimento e de retalho no setor bancário. Esta empresa desenvolve produtos para apoiar os bancos na sua atividade do dia-a-dia. Nas funções de Pesquisa e Desenvolvimento (R&D), e em particular no que diz respeito à inclusão de novas funcionalidades nos produtos, é essencial possuir o conhecimento sobre o negócio sobre o qual a funcionalidade será disponibilizada. Para o efeito, é criado um documento que sistematiza todo o conhecimento de negócio necessário para que seja possível iniciar as fases de engenharia, nomeadamente o desenho da solução e o desenvolvimento propriamente dito. O meu estágio na Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) consistiu na elaboração deste documento, incidindo sobre um instrumento financeiro específico, as opções. Este documento visa ajudar à implementação de um desenho funcional, passando o cliente a entender todos os conceitos, vertentes e formas de utilização possíveis do instrumento que está a ser trabalhado. Especifiquei o que são as opções, os seus tipos e estilos mais comuns, as especificidades a incluir no contrato, as diferentes estratégias mais utilizadas, os tipos de ordens, os riscos associados e a sua avaliação através dos Gregos. Forneci ainda algumas ferramentas para o cálculo do preço das opções, o modelo de Black-Scholes e o modelo das árvores binomiais.

A área da Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) em que estagiei realiza grande parte dos seus negócios com instituições bancárias angolanas. A economia deste país está dependente das exportações petrolíferas, sendo esta uma das *commodities* trocadas a nível internacional com maior relevância e em maior abundância. Aliando este facto com o resultado do estágio, aumentou o meu interesse sobre a troca de

opções de petróleo. Decidi, portanto, estudar este instrumento financeiro em maior profundidade.

Simplesmente intituladas opções de petróleo, os seus ativos subjacentes são efetivamente contratos de futuros de petróleo, podendo funcionar como um seguro face a alterações do preço do barril de petróleo. Estas opções são trocadas no mercado NYMEX (*New York Mercantile Exchange*), sendo o seu valor calculado sobre o petróleo Brent, na Europa, e sobre o petróleo WTI (*West Texas Intermediate*), nos Estados Unidos da América e em diversos outros países.

Gera-se, assim, o interesse em estudar a distribuição do preço das opções do petróleo, pelo que a análise da sua função densidade de probabilidade é fundamental. Esta função, pelas hipóteses que assume (como, enumerando apenas uma, um universo financeiro *risk-neutral*) pode levar a resultados tendenciosos, pelo que deve ser incluída no estudo uma função suavizada.

O risco financeiro entende-se como a probabilidade de perda de capital associada a um investimento. A análise do grau de aversão ao risco de cada investidor torna-se útil para compreender as preferências dos mesmos e a tolerância ao risco de cada um. Ocupa-se este trabalho com a estimação e a análise da aversão ao risco dos investidores de opções de petróleo, através das funções densidade de probabilidade estimadas.

O restante documento está organizado da seguinte forma: no segundo capítulo encontra-se um breve resumo sobre a história e a missão do Grupo Asseco e da Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*), bem como o relatório de estágio; o terceiro capítulo é reservado à revisão bibliográfica, expondo-se as temáticas da contextualização histórica do petróleo, os conceitos de opções e futuros, o petróleo negociado em opções, a função densidade de probabilidade *risk-neutral* e a função densidade de probabilidade subjetiva e o conceito de aversão ao risco; no quarto capítulo encontra-se a apresentação da metodologia; o quinto capítulo é reservado à análise dos resultados obtidos; e no sexto capítulo encontra-se a conclusão do trabalho.

## 2. Asseco

### 2.1. Grupo Asseco

O Grupo Asseco é uma organização internacional que se dedica à produção e ao desenvolvimento de soluções de *software* para diversos setores da economia, maioritariamente para o setor bancário. Apresenta subsidiárias em mais de cinquenta países, como em Israel, nos EUA, no Japão, no Canadá e na maioria dos países da Europa. É a Asseco Polónia que lidera o grupo, tendo sido nessa cidade que a empresa foi fundada, em 1991. Posteriormente, foi esta organização a responsável pela aquisição e criação de outras empresas, expandindo-se assim o Grupo Asseco até à dimensão conhecida atualmente.

A missão do Grupo Asseco é “construir uma empresa global de *IT*<sup>1</sup>, confiável e rentável, para fornecer aos [seus] clientes software e serviços de qualidade”<sup>2</sup>.

O Grupo Asseco opera em vários mercados internacionais, o que lhe permite ter uma grande diversidade de produtos e criar oportunidades de desenvolvimento e investigação, o que se reflete nas soluções tecnológicas encontradas para uma grande gama de produtos do setor bancário.

O portfólio do Grupo Asseco vai além das soluções de *software* para o setor bancário. Esta organização também se dedica ao desenvolvimento de soluções de *IT* para instituições atuariais, à criação de produtos e serviços para o setor das telecomunicações, para empresas de energia, para o setor da saúde, para a agricultura, entre outros, e à prestação de serviços para instituições internacionais, como a *NATO* e a União Europeia.

---

<sup>1</sup> Tecnologias de Informação.

<sup>2</sup> Informação transcrita do *website* <asseco.pt>.



## 2.2. Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*)

A Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) é uma das empresas integrantes do Grupo Asseco. Especialista em desenvolver e implementar soluções de *software* para o setor financeiro e para o setor bancário, atua em quatro áreas de negócio: *Software*, *Banking Consulting*, *Technology* e *Digital*. Opera em oito países (Portugal, Angola, Cabo Verde, Moçambique, São Tomé e Príncipe, Timor Leste, Namíbia e Malta).

A sua criação data ao ano de 1988, no Funchal, como uma *Software Banking Company*, a Promosoft. Visa dar resposta à crescente necessidade de implementação de tecnologias de informação no setor financeiro. Com o desenvolvimento e constante atualização de aplicações informáticas para a gestão bancária e a conquista de novos mercados e países, inclusive países não-lusófonos, sofre um processo de *rebranding* em 2011, para EXICTOS. Ingressa no Grupo Asseco em 2015. Em 2018, aliado à expansão no território nacional para Lisboa, com vista a responder ao plano de crescimento da empresa, sofre novo processo de *rebranding*, para Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*). É, atualmente, uma empresa de referência no mundo das tecnologias de informação.

Como forma de exemplo do trabalho desenvolvido na Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*), três áreas desenvolvidas na área de negócio *Software* são: *Core Banking*, *Digital and Channels* e *Risk and Compliance*. A unidade de *Core Banking* cria, desenvolve e aplica soluções de gestão aos produtos e serviços de determinada instituição financeira, adaptando-se às características de cada negócio específico. A unidade de *Digital and Channels* foca-se no interesse e necessidade do cliente ter acesso ilimitado aos seus dados, pagamentos e demais operações financeiras, atingido através de soluções como o *internet banking* e o *mobile banking*. A unidade de *Risk and Compliance* gere o risco das instituições financeiras, fornecendo uma visão da realidade aos seus clientes e das operações efetuadas, permitindo-lhes operar da forma mais favorável, respeitando a legislação de cada território.

Presente no mercado angolano desde 1990, com a abertura do primeiro banco comercial neste país, disponibiliza sistemas de *software* de *Core Banking* a 23 dos 28 bancos comerciais de Angola, o que representa uma presença em cerca de 82% do mercado.

### 2.3. Relatório de Estágio

Como já mencionado supra, o meu estágio na Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) consistiu na elaboração de um documento sobre as opções enquanto instrumento financeiro. Este documento é essencial para a compreensão plena, por parte do cliente, da solução de *software* encontrada.

Assim sendo, especifiquei no documento o que são os derivados financeiros – instrumentos financeiros cujo preço depende do preço de outro ativo, o ativo subjacente – e alguns dos benefícios associados à sua utilização. Ficou também documentado o que são as opções – derivados financeiros que dão ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar/vender o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida – e algumas das vantagens e desvantagens que advêm da sua utilização.

Identifiquei os diferentes tipos e posições de opções no mercado – *long call*, *short call*, *long put* e *short put*. Uma opção *long call* confere ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida. Uma opção *short call* confere ao seu vendedor a obrigatoriedade de vender os ativos subjacentes aos titulares dos mesmos, quando por estes o for solicitado. Uma opção *long put* confere ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida. Uma opção *short put* confere ao seu vendedor a obrigatoriedade de comprar os ativos subjacentes aos titulares dos mesmos, quando por estes o for solicitado. O *payoff* de uma opção *call* é dada por  $\max[(S_t - K); 0]$ , sendo

que  $S_t$  representa o preço da opção no momento  $t$  e  $K$  simboliza o preço de exercício. Para uma opção *put*, a fórmula é dada por  $\max[(K - S_t); 0]$ .

Posto isto, explanei as diferenças entre as opções *plain vanilla* e as opções exóticas, dando ênfase, na primeira categoria, às opções europeias – dão ao seu detentor o direito de as executar na data estabelecida aquando a celebração do contrato – e às opções americanas – dão ao seu detentor o direito de as executar em qualquer momento até à sua data de maturidade.

Especifiquei as características das opções a mencionar num contrato referente à troca deste instrumento – o ativo subjacente, o preço da opção (*premium*), o preço de exercício, a data de maturidade, a volatilidade implícita e a taxa de juro sem risco.

Expliquei o que são estratégias *bullish* (referentes a um investidor que espera uma subida do preço de mercado do ativo subjacente), *bearish* (referentes a um investidor que espera uma descida do preço de mercado do ativo subjacente) e *neutral* (referentes a um investidor que não tem qualquer estimativa para o preço de mercado do ativo subjacente). Posto isto, identifiquei algumas estratégias, fornecendo exemplos e representações gráficas de cada uma delas. As estratégias que listei foram as seguintes: *covered call*, *protective collar*, *married put*, *vertical spread*, *bull-call spread*, *bear-put spread*, *box spread*, *calendar spread*, *diagonal spread*, *strangle*, *straddle*, *butterfly*, *iron butterfly*, *condor spread*, *iron condor*, *strap* e *strip*.

Seguidamente, apresentei algumas ordens de mercado – forma como um investidor pode entrar ou sair de um negócio. Identifiquei e expliquei as ordens *buy to open/close*, *sell to open/close*, de mercado, limite (que se divide em quatro ordens – ordens de limite de compra, ordens de limite de venda, as ordens *stop* de compra e as ordens *stop* de venda), de duração (como exemplos, *All Or None* e *Market On Close*), de saída (como exemplos, *Market Stop Order* e *Stop Loss Order*) e combinadas (como exemplos, *One Trigger Other* e *One Cancel Other*).

Identifiquei os diferentes tipos de risco associado ao investimento em opções – risco de crédito, risco de liquidez e risco de liquidação. Seguidamente, expliquei o que são os Gregos – ferramentas utilizadas para determinar como é que as alterações das variáveis de um modelo de *pricing* da opção afetam o seu valor – e a sua importância no cálculo do risco. Explanei os cinco Gregos com maior relevância – o *Delta*, o *Gama*, o *Vega*, o *Teta* e o *Ró* –, fornecendo as fórmulas e exemplos de cada um. O *Delta* mede a variação relativa do preço da opção com respeito a uma alteração de um ponto absoluto do valor do ativo subjacente. O *Gama* mede a variação relativa do delta com respeito a alterações no valor do ativo subjacente. O *Vega* mede a variação relativa do preço da opção com respeito a uma alteração de um ponto absoluto do valor da volatilidade implícita. O *Teta* mede a variação relativa do preço da opção com respeito à passagem do tempo, ou seja, quanto o valor de uma opção vai diminuir até à maturidade. O *Ró* mede a variação relativa do preço da opção com respeito a uma alteração de um ponto percentual do valor da taxa de juro sem risco.

Forneci, por fim, algumas ferramentas para o cálculo do preço das opções, dando alguns exemplos concretos. Elenquei o Modelo de *Black-Scholes* e o método das árvores binomiais.

Ao longo de todo o documento desenvolvi sobre alguns conceitos diversos, definições que se provaram úteis para a compreensão completa de todo o índice do documento. Assim, elucidei o leitor sobre os tipos de investidores e o grau de aversão ao risco de cada um, sobre conceitos como o *premium* de uma opção, o *bid-offer spread*, o sorriso de volatilidade, o *dividend yield* e a taxa de retorno, sobre os mercados de transações de opções e sobre a classificação das opções em relação ao preço dos ativos subjacentes, entre outros.

Em suma, este estágio na Asseco PST (*Portuguese Speaking Territories*) permitiu-me ganhar métodos de trabalho no seio de uma *software house*, bem como compreender o percurso de uma solução de *software*, desde o pedido do cliente até à sua implementação. Terminei o estágio com um sentimento de realização por ter

contribuído para a criação de uma componente essencial no trabalho de uma empresa de renome.

### 3. Revisão Bibliográfica

O petróleo é a forma de energia, bem como o combustível fóssil, mais utilizada em todo o mundo. O seu consumo representa cerca de 35% do consumo de energia a um nível global, sendo considerado como a principal fonte de energia.

Atualmente, mais de 60% do petróleo é destinado ao setor dos transportes, cerca de 25% é utilizado pelo setor industrial e cerca de 15% é utilizado enquanto matéria-prima na produção de outros bens.

#### 3.1. Contextualização Histórica

A descoberta do petróleo credita-se ao início da civilização. A sua exploração foi ampliada em larga escala no século XIX, na Escócia, com o desenvolvimento do processo de refinação, sendo usado principalmente em motores a gasolina e a diesel. Apresentava o Azerbaijão, no final do século XIX, a maior produção mundial de petróleo, representando mais de 50% da produção mundial desta *commodity*. Na década de setenta do século XX, o consumo de petróleo representava, aproximadamente, 50% do consumo de todas as fontes de energia disponíveis à data.

O fim da segunda guerra mundial implicou a descolonização, o que conduziu à reivindicação do direito de os países controlarem as matérias-primas produzidas no seu território. Os países do Médio Oriente com extensas reservas de petróleo, anteriormente comercializado pelos países ocidentais, como a Grã-Bretanha, passaram a controlar a sua produção de petróleo. Em 1950, empresas petrolíferas norte-americanas propuseram um contrato a alguns países do Médio Oriente, como a Arábia

Saudita e o Iraque, que lhes permitiam ter melhores condições de extração e comercialização desta matéria-prima, passando os lucros obtidos a serem divididos 50-50 com os Estados Unidos da América. Tal medida acabou por impactar negativamente os países produtores de petróleo, o que implicou, no início da década de setenta, a nacionalização de empresas petrolíferas pelos mesmos, para protegerem o seu direito à comercialização da matéria-prima existente no seu território. No entanto, os países ocidentais contornaram estas nacionalizações, por forma a continuarem o seu envolvimento na atividade de comercialização do petróleo.

Em 1960 foi criada a Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP), composta pela Arábia Saudita, Irão, Iraque, Kuwait e Venezuela, países esses cujas reservas de petróleo representavam 25% das mundiais. Tem como objetivo a uniformização das políticas de produção e comercialização desta *commodity*, bem como garantir a estabilidade dos mercados de petróleo. Atualmente é composta por treze países, que controlam quase 80% das reservas mundiais de petróleo.

Em 1973, dá-se o primeiro choque petrolífero, originado pela guerra do Yom Kippur. O preço desta *commodity* mais que duplicou e a sua produção diminuiu, dando mais poder aos países produtores de petróleo, que passaram a controlar o mercado.

Em 1979, verifica-se nova subida de preços, provocada pela diminuição abrupta na produção iraniana de petróleo, originada pela instabilidade política nesse país.

Em 1990, com a invasão do Kuwait pelo Iraque na primeira Guerra do Golfo, o preço do barril de petróleo volta a duplicar. Em 1991 verifica-se a sua diminuição para o preço pré-guerra depois da expulsão do exército iraquiano do Kuwait.

A grande recessão de 2007/09 suscitou um aumento significativo do preço do barril do petróleo, seguido de uma descida abrupta derivada da crise financeira sentida a nível mundial. No final de 2009, os preços do barril de petróleo assumiram valores próximos do pré-crise.

A explosão da plataforma de petróleo *Deepwater Horizon*, no Golfo do México, em 2010, representa o maior derrame de petróleo de sempre. Este fenómeno teve graves consequências ambientais, afetando nefastamente, imediatamente e no longo prazo, a vida de milhares de espécies, incluindo a humana. A economia dependente desta zona foi também afetada, como é o caso da pesca e do turismo.

Em 2014, verificou-se uma queda rápida da cotação do petróleo, potenciado por três fatores. O crescimento económico foi mais baixo que o expectável, o que resultou numa diminuição mundial da procura do petróleo. A oferta de petróleo aumentou. A OPEP decidiu não intervir no preço do barril de petróleo, deixando que este fosse determinado pelo jogo da oferta e da procura, o que resultou num excesso de oferta e na consequente descida de preços. Os preços do barril de petróleo voltaram a aumentar posteriormente.

No segundo trimestre de 2020, verificou-se nova queda dos preços do barril de petróleo, devido à pandemia do COVID-19 e à guerra de preços entre a Rússia e a Arábia Saudita. A OPEP e os restantes países produtores de petróleo diminuíram os preços por forma a estabilizá-los. O preço do barril de petróleo WTI (*West Texas Intermediate*) assumiu um valor negativo em abril de 2020, pela primeira vez desde que existem registos desta variável.

Atualmente, os países importadores de petróleo são liderados pela China, pelos Estados Unidos da América e pela Índia, responsáveis por, aproximadamente, 22%, 12% e 10%, respetivamente, enquanto que os países exportadores de petróleo são liderados pela Arábia Saudita, pela Rússia e pelo Iraque, responsáveis por, aproximadamente, 13%, 12% e 8%, respetivamente. Em termos de consumo de petróleo, os Estados Unidos da América lideram a lista de países, responsáveis pelo consumo diário de aproximadamente 25% do consumo total diário. A China segue em terceiro nessa lista, expectando-se um aumento exponencial do consumo de petróleo, sendo que alguns analistas financeiros estimam um aumento de 7,5% anualmente. Em relação à produção de petróleo, lideram a lista os Estados Unidos da América, a Arábia Saudita e a Rússia.

O preço do barril de petróleo é afetado por diversos fatores que permitem conferir-lhe alguma estabilidade. No entanto, alterações em algumas dessas variáveis podem tornar o preço desta *commodity* mais volátil. Alguns dos determinantes do preço do barril de petróleo são: 1) a produção de petróleo pela OPEP, pela Rússia e pelo Mar do Norte, 2) os relatórios da Agência Internacional de Energia, 3) desastres naturais que afetem as infraestruturas da extração e da produção de petróleo, 4) o jogo da oferta e da procura, 5) o valor do dólar, 6) as condições de armazenamento do petróleo, 7) especuladores que comprem e vendem contratos de futuros com elevada rapidez com o objetivo de encontrar oportunidades de arbitragem, e 8) relatórios macroeconômicos dos países consumidores que prevejam um aumento ou uma diminuição no consumo de petróleo no futuro, o que pode fazer aumentar ou diminuir os preços do barril de petróleo no presente.

Existem diferentes tipos de petróleo, diferenciados pela sua constituição química, pela sua consistência e pela sua potencialidade para diferentes usos. Os tipos mais utilizados e mundialmente discutidos são o petróleo WTI e o petróleo Brent. O barril de petróleo do tipo WTI, utilizado como referência norte-americana, é cotado na NIMEX (*New York Mercantile Exchange*), enquanto que o do tipo Brent, utilizado como referência europeia, é cotado na ICE Futures (*Intercontinental Exchange Futures*).

O petróleo WTI tem um preço ligeiramente inferior ao preço do barril de petróleo Brent. O petróleo Brent é produzido perto do mar, sendo-lhe inferido custos de transportes mais baixos que ao petróleo WTI, produzido em áreas cercadas por terra. O petróleo WTI tem o preço inferior também devido às inovações nos processos de *fracking* e de *drilling* por parte dos Estados Unidos da América. A OPEP utiliza o petróleo Brent como base de determinação dos preços do barril do petróleo. O preço do barril de petróleo WTI é mais volátil que o preço do barril de petróleo Brent.



## 3.2. Opções e Futuros

### 3.2.1. Opções

As opções são derivados financeiros que dão ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar/vender o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida. O contrato é firmado entre o vendedor e o comprador, e um valor de *premium* acordado é pago na data de assinatura do contrato.

A utilização de opções tem vantagens múltiplas. Permite tirar proveito da alavancagem financeira (resulta da entrada num investimento com capital emprestado), comprar tempo para decidir tendo o preço sido definido no presente, proteger os ativos de uma alteração no preço de mercado, auferir um rendimento, criar oportunidades de investimento únicas e customizadas a cada investidor, e exige baixos requisitos de capital inicial.

As opções têm como desvantagens a liquidez reduzida devido à presença de opções com diferentes datas de maturidade e diferentes preços de exercício num único portfolio de investimento, à existência de *bid-ask spreads* elevados, ao pagamento de custos administrativos maiores que os resultantes do investimento noutros derivados financeiros, e à indisponibilidade de opções em todos os ativos.

Uma opção *call* dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida. Uma opção *put* dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender o ativo subjacente por um valor pré-estabelecido numa, ou até uma, data pré-estabelecida.

As opções podem também ser classificadas quanto à relação do seu preço com o preço do ativo subjacente. Diz-se que uma opção *call* se encontra *In-The-Money* (ITM) quando o preço de mercado do ativo subjacente é superior ao preço de exercício (para opções *put*, inferior); diz-se que uma opção *call* se encontra *Out-The-Money* (OTM) quando o preço de mercado do ativo subjacente é inferior ao preço de exercício (para opções *put*,

superior); por fim, diz-se que uma opção *call/put* se encontra *At-The-Money* (ATM) quando o preço de mercado do ativo subjacente é igual ao preço de exercício.

A fórmula do *payoff* de uma opção *call* é dada por  $\max[(S_t - K); 0]$ , representando  $S_t$  o preço da opção no momento  $t$  e  $K$  simboliza o preço de exercício. A fórmula do *payoff* de uma opção *put* é dada por  $\max[(K - S_t); 0]$ . As opções podem tomar duas posições, *long* e *short*.

Os instrumentos usados no cálculo do preço das opções são variados, sendo que os modelos financeiros são os mais utilizados. O modelo de *Black-Scholes* utiliza uma distribuição *log-normal* para calcular os preços das opções. A equação associada é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad [1]$$

Na equação [1],  $V$  simboliza o valor da opção,  $t$  o momento presente,  $\sigma$  a volatilidade implícita,  $S$  o valor do ativo subjacente e  $r$  a taxa de juro sem risco.

A fórmula usada para o cálculo do preço das opções *call* é dada por:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad [2]$$

sendo que  $d_1 = [\ln(S_0/K) + (r + 0,5 * \sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}$  e  $d_2 = [\ln(S_0/K) - (r + 0,5 * \sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ . A fórmula usada para o cálculo do preço das opções *put* é dada por:

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad [3]$$

As distribuições normais de  $d_1$  e de  $d_2$  representam a probabilidade de as opções expirarem ITM. Este modelo tem algumas premissas, o que o limita na perceção da realidade. Essas premissas são: 1) só trabalha com opções europeias, 2) assume que não são pagos dividendos ao longo da vida da opção, 3) assume que os mercados são eficientes (não há possibilidades de arbitragem), 4) assume que os custos operacionais

são nulos, 5) assume que a volatilidade e a taxa de juro sem risco são valores conhecidos e constantes, 6) assume que os retornos são constantes, e 7) assume que os investidores são avessos ao risco.

A paridade *put-call* estabelece uma relação entre duas opções europeias, uma *call* e uma *put*, com o mesmo ativo subjacente, o mesmo preço de exercício e a mesma maturidade. Supõem-se que, para a paridade *put-call* se verificar, o ativo subjacente é suficientemente líquido e que não existem oportunidades de arbitragem. A fórmula é dada por:

$$P_t + S_t = C_t + e^{-r(T-t)} * K, \quad [4]$$

sendo  $P_t$  o valor da opção *put* no momento  $t$ ,  $S_t$  o valor de mercado do ativo subjacente no momento  $t$ ,  $C_t$  o valor da opção *call* no momento  $t$ ,  $r$  a taxa de juro sem risco, a diferença  $(T - t)$  o tempo até à maturidade, e  $K$  o preço de exercício da opção. A expressão  $e^{-r(T-t)}$  representa o valor presente do preço de exercício, descontado do preço de exercício da opção. Se o ativo subjacente paga dividendos ao longo da vida da opção, a fórmula passa a ser:

$$P_t + S_t = C_t + D_t + e^{-r(T-t)} * K. \quad [5]$$

Os fatores mais influenciadores do preço das opções são: a proximidade do preço do ativo subjacente e do preço de exercício da opção, o tempo para a maturidade, a volatilidade histórica do ativo subjacente e a volatilidade implícita, a taxa de juro sem risco e o *dividend yield*. A volatilidade implícita apresenta-se como uma estimativa para o futuro no que respeita à volatilidade de uma opção. A taxa de juro sem risco representa a remuneração do ativo num ambiente livre de risco, sendo um exemplo clássico desta uma *T-bill*. O *dividend yield* é uma percentagem que indica, se constante, quanto é que uma empresa paga de dividendos todos os anos aos seus acionistas.

### 3.2.2. Futuros

Os contratos de futuros são acordos estandardizados que envolvem a troca de uma quantidade pré-estabelecida de uma *commodity*, a um preço pré-estabelecido, numa data futura pré-estabelecida. O contrato é firmado entre o vendedor e comprador, e um requerimento de margem, denominado margem inicial, é pago, que corresponde a uma percentagem do valor total do contrato.

Realizar investimentos sob contratos de futuros assume várias vantagens. A mais importante prende-se com a mitigação do risco associado à volatilidade do preço do ativo subjacente. O uso de futuros permite a entrada em investimentos específicos que exijam um contrato estandardizado e grande capacidade de alavancagem financeira. Os requisitos de margem à entrada num contrato de futuros são relativamente constantes, pelo que um investidor sabe o valor a despendar antecipadamente. O fenómeno conhecido como *time decay* na troca de opções não é aplicável na troca de futuros. O investimento em futuros implica, por norma, um investimento mais líquido que um em opções. Comissões e custos administrativos são relativamente baixos na troca de futuros.

Algumas desvantagens da troca de futuros prendem-se com a imprevisibilidade dos acontecimentos futuros, os riscos acrescidos associados à grande capacidade de alavancagem, e a troca de grandes quantidades de bens, normalmente indivisíveis.

A fórmula de *payoff* de um contrato de futuros depende de se tratar de uma posição *long* ou de uma posição *short*. A primeira é assumida pelo investidor que compra o ativo subjacente ao preço de exercício, e a segunda é assumida pelo que vende o ativo subjacente ao preço de exercício. A fórmula do *payoff* de um futuro *long* é dada por  $[S_t - K]$ , enquanto que a fórmula do *payoff* de um futuro *short* é dada por  $[K - S_t]$ .

Devido à lei do preço único, o preço de um contrato de futuros tenderá a convergir com o *spot price* com o aproximar da data de maturidade. A diferença entre estes dois preços denomina-se de *mark-to-market*. Aplicam-se os termos *contango* e *backwardation* no

que toca à relação entre o *spot price* futuro esperado e o preço do contrato de futuros real. Um mercado encontra-se em contango quando o preço do contrato de futuros é superior ao *spot price* futuro esperado. Um mercado encontra-se em *backwardation* quando o preço do contrato de futuros é inferior ao *spot price* futuro esperado.

### 3.3. A Troca de Opções de Petróleo

O petróleo é a *commodity* mais negociada internacionalmente. As opções de petróleo não simbolizam uma troca da matéria-prima, devido à instabilidade do seu preço; simbolizam a troca de futuros de petróleo. Ou seja, o petróleo é trocado pelo preço do seu futuro. Assim sendo, uma opção de petróleo simboliza o direito, mas não a obrigação, do investidor adquirir (no caso de uma opção *call*; vender, para uma opção *put*) um futuro de petróleo subjacente, a um preço pré-estabelecido, numa data, ou até uma data, pré-estabelecida. Considera-se que um contrato de opções desta *commodity* envolve a troca de 1000 barris, é avaliado em dólares, e o contrato de opções tem, geralmente, o estilo americano. Atingida a maturidade de uma opção de petróleo, se se tratar de uma opção *long call* ou de uma opção *short put*, transforma-se num futuro *long*; se se tratar de uma opção *long put* ou de uma opção *short call*, transforma-se num futuro *short*.

A compra de opções de petróleo apresenta vantagens em detrimento da compra de futuros de petróleo, como uma maior alavancagem e a limitação de perdas. A primeira razão é justificada pelo pagamento de um *premium* inferior que o valor correspondente aos requisitos de margem necessários para a entrada num contrato de futuros. A detenção de uma opção permite ao investidor entrar num enorme leque de estratégias, o que torna este derivado financeiro flexível perante clientes com diferentes aversões ao risco, com diferentes horizontes temporais, entre outras características.

A troca de futuros do petróleo implica um avultado investimento inicial, com riscos enormes para o investidor, assim como elevados níveis de volatilidade. Por outro lado,

a troca de opções de futuros envolve um investimento inicial mais reduzido, com perdas muito inferiores caso o preço do barril de petróleo não se altere demasiado consoante o esperado pelo investidor, sendo também um negócio acessível a um número superior de investidores. O investimento em futuros e em opções de petróleo, bem como em ETFs (*Exchange Traded Funds*) e a compra de barris de petróleo, simbolizam métodos de investimento direto. Investimento indireto em petróleo passará pela aquisição de ETFs do setor energético ou de fundos mútuos do setor energético, entre outros (o investimento indireto envolve um risco reduzido para o investidor).

Um dos tipos de opções mais utilizados na troca desta *commodity* são as opções binárias. Uma opção binária é uma opção exótica (opções exóticas diferem das tradicionais opções *vanilla* nas suas condições de pagamento, nas datas de maturidade e nos preços de exercício) que assume apenas dois resultados, quebra ou alta da cotação do ativo subjacente. Se o previsto na data de celebração do contrato se demonstrar correto na data de maturidade, o investidor recebe um montante fixo definido; se não, o investidor perde o *premium*.

As opções de petróleo devem ser analisadas como sendo um seguro quanto a subidas ou descidas do preço dessa *commodity*. Assim sendo, as variáveis que influenciam o preço deste derivado financeiro serão as especificidades do contrato de opções: o preço de exercício, o tempo para a maturidade (duração ou valor do tempo), a volatilidade implícita e a taxa de juro sem risco.

A volatilidade é a única variável desconhecida aquando a assinatura do contrato de opções. A volatilidade histórica é calculada através de observações passadas registadas durante um determinado período de tempo – é o desvio-padrão das alterações de futuros de petróleo, em logaritmo, descontado anualmente.

### 3.4. Função Densidade de Probabilidade *Risk-Neutral* e Função Densidade de Probabilidade Subjetiva

Focar-nos-emos agora na relação entre a função densidade de probabilidade *risk-neutral* (RND) e a função densidade de probabilidade subjetiva ou suavizada (SD). O cálculo da função RND é fundamental para compreender a distribuição dos preços das opções, bem como conceber possíveis comportamentos futuros. No entanto, esta função não demonstra quais os graus de aversão ao risco dos investidores. Com o propósito de dissecar esta variável, coloca-se o objetivo de calcular a função SD, sendo esta igual à função RND multiplicada pelo ajuste de aversão ao risco.

A função RND é recorrentemente utilizada no processo de avaliação do preço de derivados financeiros. É caracterizada como uma função densidade de probabilidade sobre a qual o preço atual do ativo subjacente é igual à expectativa (descontada) do seu preço futuro.

Pela abordagem de Cox e Ross (1976), o preço de uma opção *call* europeia é dada por:

$$C(K) = e^{-rt} \int_0^{+\infty} \max(S - K, 0) f(S) dS = e^{-rt} \int_K^{+\infty} (S - K) f(S) dS, \quad [6]$$

com  $r$  a representar a taxa de juro sem risco,  $t$  o tempo até à maturidade,  $S$  o preço atual do ativo subjacente,  $K$  o preço de exercício e  $f(\cdot)$  a função RND.

A equação [6] significa que o preço da opção *call* atualmente corresponde à expectativa descontada na data de maturidade com o valor  $\max[(S - K); 0]$  e a probabilidade  $f(S)$ , sendo o fator de desconto  $e^{-rt}$ .

A estimação da função RND tem tomado cada vez mais importância para a estimação de preços no domínio das instituições financeiras. No entanto, esta estimação não é perfeita nem bem-comportada, carecendo em vários aspetos. Primeiro, uma alteração no período analisado pode alterar a função RND, o que significa que esta função não é única. Segundo, os *market noises*, como os *bid-ask spreads* e as trocas não estandardizadas, podem corromper a função RND. Terceiro, a impossibilidade de

existirem oportunidades de arbitragem. Finalmente, as restrições impostas pela função RND enquanto função densidade de probabilidade, como a obrigatoriedade em ser positiva e sua integração igualar a unidade.

A função RND pode ser estimada através de dois métodos distintos, métodos paramétricos e métodos não-paramétricos. Os métodos paramétricos constroem a distribuição de uma variável, baseando-se em alguns parâmetros, e realizam ajustes a esta distribuição ao minimizar o erro. O exemplo clássico da estimação da função RND utiliza dois parâmetros com distribuição *lognormal*, com média e desvio-padrão desconhecidos (este é o método de estimação do modelo de *Black-Scholes*, o mais utilizado para calcular o preço de opções). No entanto, este modelo já provou ser pouco flexível para abraçar todas as hipóteses adjacentes à troca de opções na realidade. Os métodos não-paramétricos focam-se em atingir maior flexibilidade que os anteriores, podendo tomar qualquer forma e não apenas a das conhecidas funções de utilidade.

A função SD é a função densidade de probabilidade estimada atendendo às preferências dos consumidores em termos de aversão ao risco. Trata-se da função densidade de probabilidade suavizada dos dados observados.

A função SD pode ser calculada através de vários procedimentos: um estimador *kernel* dos preços passados realizados<sup>3</sup>, a expansão de polinomiais de Hermite<sup>4</sup> ou um modelo GARCH (Modelo de Heteroscedasticidade Condicional Auto-Regressiva Generalizada)<sup>5</sup>.

A função densidade de probabilidade trata-se da primeira derivada da função de distribuição. Assim sendo, a densidade de cada valor pode ser calculada pela diferença na função de distribuição de dois valores relativamente próximos, apresentada na seguinte equação:

$$d(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(V < v+h) - P(V < v-h)}{(v+h) - (v-h)}, \quad [7]$$

---

<sup>3</sup> Utilizado por Jackwerth (1997) e por Ait-Sahalia and Lo (2000)

<sup>4</sup> Utilizado por Coutant (1999)

<sup>5</sup> Utilizado por Rosenberg and Engle (1997)



representando  $h$  a largura de banda. Normalizou-se que uma boa aproximação da probabilidade de um dado valor corresponde ao quociente do número de observações num intervalo centrado nesse valor ( $v$ ), com determinada largura de banda, pelo número total de observações ( $n$ ), multiplicado por uma constante. Tal é dado pela seguinte equação:

$$d(v_s) = const * \frac{\#v}{n}. \quad [8]$$

Sabe-se, também, que a área do histograma equivale à unidade, pelo que

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} d^*(v_s) * h = 1 \Leftrightarrow \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d^*(v_s) = \frac{1}{h}. \quad [9]$$

Assim sendo, o histograma da função densidade de probabilidade suavizada, ou seja, o histograma da função SD, assumindo que a constante da equação [8] é dada por  $1/h$ , é dado por:

$$d^*(v) = \frac{\#v/n}{2h} = \frac{\#v}{2nh}. \quad [10]$$

Neste trabalho, utilizou-se a relação entre os preços das opções e a função densidade da distribuição normal para calcular a função RND, e utilizou-se um estimador *kernel* para estimar a função SD através dos preços das opções observados.

### 3.5. Aversão ao Risco

O conceito de aversão ao risco refere-se ao comportamento dos investidores quando confrontados com incerteza.

Dizer que um investidor é *risk averse* implica que este prefere retornos menores com níveis de risco menores em detrimento de retornos maiores com níveis de risco maiores, ou seja, atribui grande valor à estabilidade. É, portanto, um investidor que, perante várias oportunidades de investimento que auferam o mesmo retorno, escolherá

sempre a que apresentar riscos inferiores. Um investidor *risk averse* escolhe investimentos com volatilidades o mais perto possível de zero.

Um investidor *risk-neutral* toma a decisão de investir ou não com base nas possibilidades de retorno, não considerando o risco associado. Um investidor *risk lover* está disposto a suportar mais risco num investimento com retornos potenciais marginalmente menores, ou seja, toma grandes riscos na incerteza de obter grandes retornos.

Seja  $U(\cdot)$  a função de utilidade, e representando  $U'$  e  $U''$  a primeira e a segunda derivada de  $U(\cdot)$ , respetivamente. Representa  $R(\cdot)$  o coeficiente de aversão ao risco relativa (RRA), e a sua função, desenvolvida por Pratt (1964), é dada por:

$$R(\cdot) = -w \frac{U''}{U'}, \quad [11]$$

com  $w$  a simbolizar o nível de riqueza. A função do coeficiente de aversão ao risco absoluta (ARA) é dado por

$$A(\cdot) = -\frac{U''}{U'}. \quad [12]$$

A segunda derivada da função de utilidade é negativa para investidores *risk averse*, nula para investidores *risk-neutral* e positiva para investidores *risk lover*. Assim sendo, o coeficiente de aversão ao risco relativa é positivo para investidores *risk averse*, e a função de utilidade é estritamente côncava.

Na construção e análise de funções de aversão ao risco, o objetivo corresponde sempre à maximização da função utilidade no momento  $t$  da utilidade esperada no momento  $T$ , sujeitando-se à restrição de que o valor de riqueza esperado descontado no momento  $T$  é igual ao valor da riqueza no momento  $t$ . Isto traduz-se na seguinte função:

$$\max \int_{-\infty}^{+\infty} p(S_T) U(\pi_{S_T}, S_T) dS_T, \quad [13]$$

sujeita à restrição demonstrada por

$$e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{S_T} q(S_T) dS_T = W_t. \quad [14]$$

Nas equações [13] e [14], a função SD é representada por  $p(S_T)$ ,  $U(\cdot)$  representa a função utilidade,  $\pi_{S_T}$  representa a quantidade do ativo subjacente adquirida em  $T$ ,  $S_T$  representa o preço do ativo subjacente no momento  $T$ ,  $r_\tau$  simboliza a taxa de juro sem risco no momento  $\tau$ , com  $\tau = T - t$ ,  $q(S_T)$  representa a função RND e  $W_t$  simboliza o valor inicial de riqueza.

A igualdade  $W_T(S_T) = \pi_{S_T}$  mostra-se verdadeira, justificada pela ideia que o valor da riqueza na data de maturidade como uma função de cada estado corresponde às quantidades de ativo subjacente compradas.

O equilíbrio é dado pela primeira derivada da função de Lagrange  $L$ , em relação à quantidade do ativo subjacente adquirida em  $T$  e ao multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Este multiplicador de Lagrange  $\lambda$  representa a taxa de alteração do valor ótimo da função maximizante com o aumento do valor dos *inputs*. Assim sendo, obtêm-se as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = W_t - e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{S_T} q(S_T) dS_T = 0 \quad [15a]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_{S_T}} = p(S_T) U'_\pi(\pi_{S_T}, S_T) - \lambda e^{-r\tau} q(S_T) = 0 \Leftrightarrow U'_\pi(\pi_{S_T}, S_T) = \lambda e^{-r\tau} \frac{q(S_T)}{p(S_T)} \quad [15b]$$

O coeficiente da ARA é conseguido derivando novamente a função utilidade, ou seja:

$$U''_\pi(\pi_{S_T}, S_T) = \lambda e^{-r\tau} \frac{q'(S_T) p(S_T) - q(S_T) p'(S_T)}{[p(S_T)]^2} \quad [16]$$

Assim sendo, o coeficiente da RRA pode também ser apresentado da seguinte forma:

$$R(S_T) = w \left[ \frac{p'(S_T)}{p(S_T)} - \frac{q'(S_T)}{q(S_T)} \right]. \quad [17]$$

O cálculo da função SD permite, portanto, a análise das aversões ao risco dos investidores de uma forma correta e não tendenciosa, admitindo-se assim interpretações económicas e financeiras de relevo.

Executado o cálculo das funções RND e SD, com grande grau de certeza não são estas funções análogas. A diferença entre ambas revela o ajuste à aversão ao risco associado às preferências de risco de cada investidor.

#### 4. Apresentação da Metodologia

A base de dados recolhida para esta análise corresponde ao preço dos futuros de petróleo WTI, em dólares, entre 2 de janeiro de 2007 e 28 de agosto de 2020.

A base de dados foi retirada do *website* <[investing.com/commodities/crude-oil-historical-data](http://investing.com/commodities/crude-oil-historical-data)>, acedido em 1 de setembro de 2020. Foi posteriormente comparada com as bases de dados relativas à mesma variável recolhidas da plataforma *Bloomberg* e da plataforma *Datastream*, coincidindo os valores recolhidos na sua plenitude.

Os dados foram organizados de forma crescente e em *bins*, e a média foi calculada (ver *Apêndice 1*), correspondendo ao valor de, aproximadamente, 71,75\$. O valor mínimo observado registou-se no dia 20 de abril de 2020, de (-37,63\$). Foi o valor registado mais baixo desde o início dos registos pela BP (*British Petroleum*), em 1861. Tal valor deve-se à excessiva oferta de petróleo WTI em relação à escassa procura, justificada pela pandemia do COVID-19. Um valor negativo do preço desta *commodity* significa que os produtores de petróleo WTI pagaram aos consumidores para ficarem com o petróleo, com receio de não ter capacidade de armazenamento de petróleo no mês seguinte. O valor máximo observado de 145,29\$ registou-se no dia 3 de julho de 2008. Os valores circundantes são também eles elevados, justificados pela alta procura e pela baixa oferta, derivada da estagnação na produção de petróleo resultante de vários episódios.

A média e o desvio-padrão foram calculados (ver *Apêndice 1*), o que permitiu criar um histograma dos dados, escrevendo-se posteriormente a função probabilidade de densidade da distribuição normal (ver *Apêndice 2*). Ignorou-se o valor negativo do dia 20 de abril de 2020, visto ser o único e tratar-se de um episódio atípico.

Para o cálculo da função SD recorreu-se a um estimador *kernel* e, apesar de existirem métodos mais rigorosos para estimar a largura de banda a considerar, utilizou-se a largura de banda *Silverman's Rule of Thumb* ( $h^*$ ), dado como uma largura de banda bastante fidedigna. A sua equação apresenta-se como

$$h^* = 1.06 \frac{\sigma}{\sqrt[5]{n}}, \quad [18]$$

sendo  $\sigma$  o desvio-padrão dos dados antes de serem suavizados e  $n$  o número de observações.

Posteriormente, utilizou-se a equação [10] para calcular o histograma associado à função SD, estimando-se a função SD a partir daí (ver *Apêndice 3*).

Por fim, estipulada a relação entre a função RND, a função SD e o ajuste à aversão ao risco, dividiram-se os valores estimados da função SD pelos valores estimados da função RND com o objetivo de dissecar os valores atingidos para o ajuste à aversão ao risco (ver *Apêndice 4*).

## 5. Análise dos Resultados

Os valores obtidos da aversão ao risco foram associados às respetivas datas cronológicas. Verificam-se cinco vagas relevantes de crescimento e diminuição no valor da aversão ao risco, no que diz respeito aos preços das opções do petróleo. Tal está demonstrado no *Apêndice 4*, resumido na Tabela 1 | Organização temporal dos resultados.

Organização temporal				
Primeira vaga: crescimento	Segunda vaga: diminuição	Terceira vaga: crescimento	Quarta vaga: diminuição	Quinta vaga: crescimento
12/08 – 02/09	01/07 – 08/07	09/07 – 03/08	04/08	04/08 – 07/08
01/15 – 11/16	09/08 – 09/09	03/10 – 05/10	03/11 – 05/11	
06/17 – 07/17	12/09 – 02/10	10/10 – 03/11	04/12	
03/20 – 08/20	06/10 – 09/10	06/11 – 03/12	07/13 – 06/14	
	11/14 – 12/14	05/12 – 06/13		
	12/16 – 02/20			

Tabela 1 | Organização temporal dos resultados

### Primeira vaga

É possível verificar que a aversão ao risco dos investidores aumentou, aproximadamente, de um valor muito próximo da nulidade até 1,71 em quatro momentos distintos: 1) entre dezembro de 2008 e fevereiro de 2009, 2) entre janeiro de 2015 e novembro de 2016, 3) entre junho e julho de 2017, e 4) entre março e agosto de 2020. Como é expectável, o momento em que se registou o menor preço das opções de petróleo está enquadrado nesta vaga.

O aumento no primeiro momento deveu-se ao excesso de oferta em relação à procura de petróleo em todo o mundo. A volatilidade implícita associada aos contratos de opções de petróleo apresentava-se muito elevada, não tendo os investidores *bullish* razão para acreditar que os preços fossem aumentar. No final deste período, os valores da produção apresentaram sinais de abrandar, o que fez provocar uma menor volatilidade implícita das opções, à qual se associa valores de aversão ao risco inferiores.

O valor 1,71 foi atingido no início do segundo momento. O barril de petróleo foi trocado por menos de \$50, valor não registado desde a recessão de 2007/08. Por se viverem momentos instáveis no que toca ao preço do barril de petróleo, a volatilidade implícita dos contratos de opções era bastante elevada. A OPEP recusou-se a diminuir a produção

de petróleo, que teria como objetivo a estabilização dos preços, passando a haver excesso de oferta. Verificaram-se, assim, valores elevados de aversão ao risco. Até ao final do ano de 2015, o valor da aversão ao risco diminuiu consideravelmente, continuando a diminuir no início de 2016, ou seja, os investidores estavam confiantes que o seu investimento em contratos de opções seria mais que compensado na data de maturidade. Isto deveu-se ao baixo preço do barril de petróleo em janeiro de 2016, que rondava os \$30. A partir do terceiro trimestre de 2016 até ao final do segundo momento, os valores da aversão ao risco mostraram sinais de diminuição, com subidas ocasionais.

No terceiro momento, registaram-se valores muito próximos do máximo atingido neste intervalo. Um aumento na oferta e uma queda na procura fizeram o preço do barril do petróleo diminuir, criando-se um momento de incerteza que elevou as volatilidades implícitas dos contratos de opções de petróleo e, conseqüentemente, os valores da aversão ao risco.

O mínimo foi atingido no quarto momento, em abril de 2020. Neste mês, o preço do barril de petróleo assinalou o primeiro valor negativo de que há registo, sendo a recuperação registada, aos poucos e poucos, nos dias que se seguiram. Os valores de aversão ao risco registados no início da pandemia do COVID-19 foram relativamente baixos, aumentando até ao final do quarto momento. Tal pode ser justificado pela garantia aos investidores, em abril e maio de 2020, por parte dos analistas financeiros, que preços tão baixos não se voltariam a registar, pelo que entrar num contrato de opções resultaria, com grande percentagem de certeza, num lucro na data de maturidade.

## **Segunda vaga**

É possível verificar que a aversão ao risco dos investidores diminuiu, aproximadamente, de 1,71 até 0,60 em seis momentos distintos: 1) entre janeiro e

agosto de 2007, 2) entre setembro de 2008 e setembro de 2009, 3) entre dezembro de 2009 e fevereiro de 2010, 4) entre junho e setembro de 2010, 5) entre novembro e dezembro de 2014, e 6) entre dezembro de 2016 e fevereiro de 2020.

No primeiro momento, verificou-se um aumento dos preços do barril de petróleo, associado a uma diminuição da volatilidade implícita dos contratos de opções, o que resultou numa diminuição gradual da aversão ao risco dos investidores. O valor mínimo de aversão ao risco, de 0,60, é atingido em julho de 2007.

No início do segundo momento, os preços do barril do petróleo estavam a diminuir depois de, nos meses anteriores, se terem registado os valores mais elevados da história recente. Os investidores, auxiliados por analistas financeiros, criam que os preços do barril do petróleo não tinham outro possível comportamento que não a diminuição, pelo que as estimações dos preços futuros eram bastantes precisas, diminuindo os valores da aversão ao risco. Com alguns altos e baixos até ao final deste momento, os preços do barril do petróleo em setembro de 2009 tornam a diminuir graças ao aumento da oferta, diminuindo também os valores da aversão ao risco.

Regista-se nova diminuição da aversão ao risco no terceiro momento, com a diminuição dos preços do barril de petróleo associado a uma diminuição da volatilidade implícita.

O quarto momento é caracterizado por uma relativa constância no valor da aversão ao risco e nos valores dos preços do barril do petróleo, com ligeiros altos e baixos.

No quinto momento, deu-se uma diminuição do valor da aversão ao risco, com recuperação na segunda quinzena de dezembro de 2014. Os preços do barril do petróleo diminuíram drasticamente no quarto trimestre de 2014, devido a um excesso de oferta. Os analistas financeiros previram que um contrato de opções firmado nesse momento resultaria num lucro na sua data de maturidade, pelo que os valores de aversão ao risco eram relativamente baixos. Com a estabilização dos preços, estes valores voltaram a aumentar.



Atinge-se o máximo de aversão ao risco deste intervalo no sexto momento, em julho de 2017. No início deste momento, os valores de aversão ao risco diminuíram resultantes de um aumento do preço do barril de petróleo, apesar de ainda ser relativamente baixo comparativamente à média desta amostra. Ao longo deste momento houve diminuições e aumentos do preço do barril de petróleo, bem como dos valores da aversão ao risco. Esta tendência manteve-se até ao final deste momento, não prenunciando o flagelo que se veio a registar causado pela pandemia da COVID-19.

### **Terceira vaga**

É possível verificar que a aversão ao risco dos investidores aumentou, aproximadamente, de 0,60 até 1,66 em cinco momentos distintos: 1) entre setembro de 2007 até março de 2008, 2) entre março e maio de 2010, 3) entre outubro de 2010 e março de 2011, 4) entre junho de 2011 e março de 2012, e 5) entre maio de 2012 e junho de 2013.

Os preços do barril do petróleo aumentaram consideravelmente durante o primeiro momento, atingindo os \$110 no último mês. Verificou-se um aumento do valor da aversão ao risco ao longo do momento, sendo o máximo deste intervalo atingido em março de 2008. Ambos estes aumentos deveram-se à diminuição da oferta devido a um ato sabotador a dois oleodutos no Iraque, que reduziu a oferta de petróleo.

O segundo momento regista preços relativamente constantes num dado intervalo de preços, com um ligeiro aumento no valor da aversão ao risco, mas nada que se evidencie demasiado. O valor mínimo da aversão ao risco neste intervalo registou-se em maio de 2010.

No terceiro momento verificou-se um aumento gradual e significativo do preço do barril de petróleo, que se refletiu no aumento do valor da aversão ao risco. O aumento do preço do barril de petróleo deveu-se à falta de acordo por parte da OPEP no que toca ao aumento da produção.

No quarto momento, os preços do barril do petróleo mantiveram-se dentro de um determinado intervalo de valores, com um ligeiro aumento na transição do ano. Em junho de 2011, o valor do dólar estava em alta, contrariamente a outras moedas como o euro, e verificava-se uma escassez de produção. A desvalorização do dólar ao longo do momento resultou no aumento dos valores da aversão ao risco.

Os valores do preço do barril de petróleo mantiveram-se relativamente constantes ao longo do quinto momento, com uma ligeira descida a partir de setembro de 2012, seguida de um aumento em janeiro de 2013. Os valores da aversão ao risco aumentaram ao longo deste momento, ou seja, os investidores, com este aumento, esperavam um maior retorno do seu investimento em opções de petróleo, dado o risco ser mais elevado.

#### **Quarta vaga**

É possível verificar que a aversão ao risco dos investidores diminuiu, aproximadamente, de 1,66 até 0,51 em quatro momentos distintos: 1) de abril de 2008, 2) entre março e maio de 2011, 3) de abril de 2012, e 4) entre julho de 2013 e junho de 2014.

Durante o mês de abril de 2008, o preço do barril do petróleo aumentou de \$100 a \$119, justificado este aumento pela diminuição da oferta de petróleo, devido a greves encabeçadas por trabalhadores em petrolíferas em algumas regiões do mundo. Os valores da aversão ao risco sofreram uma queda brusca porque, apesar do clima de incerteza, os analistas financeiros conseguiram prever, com alguma certeza, o rumo dos preços nos períodos seguintes. O valor mínimo de aversão ao risco neste intervalo deu-se neste mês.

Registou-se, no início do segundo momento, o valor máximo de aversão ao risco observado neste intervalo, em março de 2011. Os preços do barril de petróleo mantiveram-se perto dos \$100, com um pico na segunda quinzena de abril. Os valores

da aversão ao risco verificaram uma ligeira descida até esta data, altura em que aumentaram, ou seja, este pico no preço do barril do petróleo levou a que os investidores entrassem em contratos de opções com volatilidades e, consequentemente, risco mais elevados.

Em abril de 2012, os preços do barril de petróleo diminuíram até dia 10 e quase que compensaram essa descida até ao final do mês, com valores de aversão ao risco a aumentar e, a partir dessa data, a diminuir. Isto traduz-se no seguinte raciocínio: um investidor, ao verificar que os preços do ativo subjacente em que quer investir estão a diminuir, continua a querer entrar num contrato de opções *put*. No entanto, reconhece que existe a possibilidade do preço do ativo subjacente, na data de maturidade, ter aumentado, pelo simples jogo da procura e da oferta. Assim sendo, irá incorrer num maior risco ao entrar nesse contrato de opções porque, apesar de não ter a obrigação de honrar o contrato, poderá perder o *premium*. Por este motivo se verifica um valor mais alto de aversão ao risco quando o preço do ativo subjacente diminui.

O quarto momento é caracterizado por preços bastante elevados, acima dos \$100, no início e no fim, com preços ligeiramente mais baixos nos meses intermédios. Isto traduz-se num aumento do valor da aversão ao risco, seguido de uma diminuição. O raciocínio usado aqui será semelhante ao descrito no parágrafo acima.

### **Quinta vaga**

É possível verificar que a aversão ao risco dos investidores aumentou, aproximadamente, de 0,51 até 1,94 num único momento: entre abril e julho de 2008. Como é expectável, o momento em que se registou o maior preço das opções de petróleo está enquadrado nesta vaga.

Os valores do preço do barril de petróleo aumentaram neste intervalo desde \$117 até ao valor máximo registado nesta base de dados, \$145, em julho de 2008. Este valor é o preço do barril de petróleo mais elevado de que há registo. A OPEP justificou estes

valores muitíssimo elevados com a especulação financeira, enquanto que alguns analistas financeiros culpavam uma suposta produção de petróleo excessiva. Os valores da aversão ao risco aumentaram ao longo deste momento, justificados pelo valor fraco do dólar neste período e pelas perturbações na oferta global de petróleo.

## 6. Conclusão

O presente trabalho trata da captação e de uma posterior análise dos valores da aversão ao risco dos investidores, obtidos pelo estudo de funções densidade de probabilidade, conseguidas de uma base de dados referente ao preço das opções de petróleo. Trata-se de um ensaio interessante pela *commodity* em questão, e por alcançar um horizonte temporal não abordado por trabalhos anteriores da mesma índole.

O petróleo é, e certamente permanecerá, uma das *commodities* trocadas no mundo com maior relevância. Este trabalho foca-se na sua troca através das opções financeiras. A análise do comportamento das opções, bem como da aversão ao risco dos investidores, permite conjecturar sobre possíveis trajetórias futuras de ambas as variáveis, embora sem certezas, visto a conduta dos indivíduos não ser previsível com rigor.

Diversas são as conclusões passíveis de retirar do estudo realizado. O resultado mais básico e simples prende-se com todos os valores de aversão ao risco obtidos serem positivos, o que se interliga com a assunção que a grande maioria dos investidores são *risk averse*. Outro resultado relevante mostra-se pelos valores de aversão ao risco muito próximos de zero em determinados momentos. Tal é demonstrado para os valores das opções mais baixos, o que significa que os investidores colocam pouco risco num investimento “de baixo custo”. Tal resultado também se verifica para os valores mais elevados das opções, o que pode ser justificado pelo seguinte raciocínio: valores muito altos de opções atraem, por norma, os investidores com mais riqueza, sendo neste grupo de investidores que, habitualmente, se incluem os investidores *risk lover*.

Pelo senso comum, esperar-se-ia que, em momentos de maior incerteza e instabilidade, os valores de aversão ao risco aumentassem. Tal verifica-se na grande maioria dos casos, no entanto existem exceções, como é o caso dos meses que abraçam o primeiro pico da pandemia do COVID-19 – este resultado poder-se-á justificar pela índole desta crise não ser do foro financeiro, apesar de o ter afetado profundamente. Contrariamente, e indo em conta ao que dita o senso comum, registaram-se os valores de aversão ao risco mais elevados desta análise no mês que antecedeu a queda do banco *Lehman Brothers*. Momentos de relativa estabilidade económica e financeira registam valores de aversão ao risco mais baixos e/ou controlados.

Futuramente, com vista a garantir a qualidade do trabalho realizado, poder-se-á comparar o modelo estimado (paramétrico de uma variável) com um modelo não paramétrico com duas ou mais variáveis, visto que um modelo paramétrico com uma variável pode não capturar todas as preferências de risco dos investidores, não correspondendo as conclusões obtidas integralmente à realidade. Sendo os resultados iguais ou muito próximos em teor, poder-se-á afirmar que o modelo paramétrico estimado é robusto, ou seja, corresponde à realidade.

## Referências Bibliográficas

- [1] Abhyankar, A., B. Xu E J. Wang (2013). Oil Price Shocks And The Stock Market: Evidence From Japan. The Energy Journal, N.D.
- [2] Asseco (2020). Asseco Group, Setembro 2020. Retirado de: <https://asseco.com/>.
- [3] Asseco Pst (2020). Apresentação Institucional – Documento Interno.
- [4] Bahra, B. (1997). Implied Risk-Neutral Probability Density Functions From Option Prices: Theory And Application. Bank Of England, ISSN 1368-5562.
- [5] Barros Luís, J. (2000). The Estimation Of Risk Premium Implicit In Oil Prices. Banco De Portugal Economics Research Department Banco De Portugal, WP 2-00.
- [6] Beidas-Strom, S. E A. Pescatori (2014). Oil Price Volatility And The Role Of Speculation. International Monetary Fund WP/14/218.
- [7] Bliss, R. R. E N. Panigirtzoglou (2004). Option-Implied Risk Aversion Estimates. Journal Of Finance, 59(1).
- [8] Chu, C., D. J. Henderson E C. F. Parmeter (2015). Plug-In Bandwidth Selection For Kernel Density Estimation With Discrete Data. Econometrics 2015, 3, Pp.199-214.
- [9] Constantinos, K., L. A. Ektor E M. Dimitrios (2010). Oil Price And Stock Market Linkages In A Small And Oil Dependent Economy: The Case Of Greece. The Journal Of Applied Business Research, 26(4).
- [10] Cox, J. C. And S. A. Ross (1976). The Valuation Of Options For Alternative Stochastic Processes. Journal Of Financial Economics, 3, Pp.145-166.
- [11] De Vincent-Humphreys, R. E J. Noss (2012). Estimating Probability Distributions Of Future Asset Prices: Empirical Transformations From Option-Implied Risk-Neutral To Real-World Density Functions. Bank Of England, Working Paper No. 455.
- [12] Fajardo, J., Ornelas, J. R. H. E De Farias, A. R. (2012). Estimating Risk Aversion, Risk-Neutral And Real-World Densities Using Brazilian Real Currency Options. Economia Aplicada, V. 16, N. 4, 2012, Pp. 567-577.
- [13] Grith, M., W. Härdle E M. Schienle (2010). Nonparametric Estimation Of Risk-Neutral Densities. Sfb 649 Discussion Paper 2010,021.
- [14] Hamilton, J. D. (2011). Historical Oil Shocks. Nber Working Paper Series, No. 16790.

- [15] Heufer, J. (2014). Nonparametric Comparative Revealed Risk Aversion. *Journal Of Economic Theory*, 153 (2014), Pp.569-616.
- [16] Investing.Com (2020). Crude Oil WTI Futures Historical Data, Setembro 2020. Retirado de: <https://www.investing.com/commodities/crude-oil-historical-data>.
- [17] Juliani, L. I. E S. Guerra (2012). Determinação Do Preço Do Petróleo A Partir Do Modelo Neoclassico De Recursos Naturais Não-Renováveis: O Modelo De Hotelling. *Revista Delos Desarrollo Local Sostenible*, 5 (13).
- [18] Kermiche, L. (2009). Dynamics Of Implied Distributions: Evidence From The Cac 40 Options Market. *Presses Universitaires De Grenoble*, 30(1), Pp.63-103.
- [19] Lake, A. E. E C. Katrakilidis (2009). The Effects Of The Increasing Oil Price Returns And Its Volatility On Four Emerged Stock Markets. *European Research Studies Journal*, N.D.
- [20] Lin, C., C. Fang E H. Cheng (2009). Relationships Between Oil Price Shocks And Stock Market: An Empirical Analysis From The Greater China. *Energy Policy*, N.D.
- [21] Mendoza, O. E D. Vera (2010). The Asymmetric Effects Of Oil Shocks On An Oil-Exporting Economy. *Cuadernos De Economía*, Vol. 47, Pp. 3-13.
- [22] Nakamura, H. E S. Shiratsuka (1999). Extracting Market Expectations From Option Prices: Case Studies In Japanese Option Markets. *Monetary And Economic Studies*, May 1999.
- [23] Organization Of The Petroleum Exporting Countries (2020). Opec Basket Price, Setembro 2020. Retirado de: [https://www.opec.org/opec\\_web/en/data\\_graphs/40.htm](https://www.opec.org/opec_web/en/data_graphs/40.htm).
- [24] Organization Of The Petroleum Exporting Countries (2020). Publications, Setembro 2020. Retirado De: [https://www.opec.org/opec\\_web/en/21.htm](https://www.opec.org/opec_web/en/21.htm).
- [25] Pratt, J. (1964). Risk Aversion In The Small And In The Large. *Econometrica*, 32(1/2), Pp.122-136.
- [26] Sheather, S. J. (1991). A Reliable Data-Based Bandwidth Selection Method For Kernel Density Estimation. *Journal Of The Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 53(3), Pp.683-690.
- [27] Smith, J. E. E K. F. Mccardle (1999). Options In The Real World: Lessons Learned In Evaluating Oil And Gas Investments. *Operations Research* 47(1):1-15.

- [28] Takkabutr, N. (2013). Option-Implied Risk Aversion Anomalies: Evidence From Japanese Market. Hitotsubashi Journal Of Economics, 54 (2013), Pp.137-157.
- [29] Thomas, P. J. (2015). Measuring Risk-Aversion: The Challenge. Measurement 79 (2016), Pp.285-301.
- [30] Węglarczyk, S. (2018). Kernel Density Estimation And Its Application. Xlviii Seminar Of Applied Mathematics, N.D.
- [31] Zhou, S. (2018). Estimation Of The Risk-Neutral Density Function From Option Prices. Graduate Theses And Dissertations, 16498.



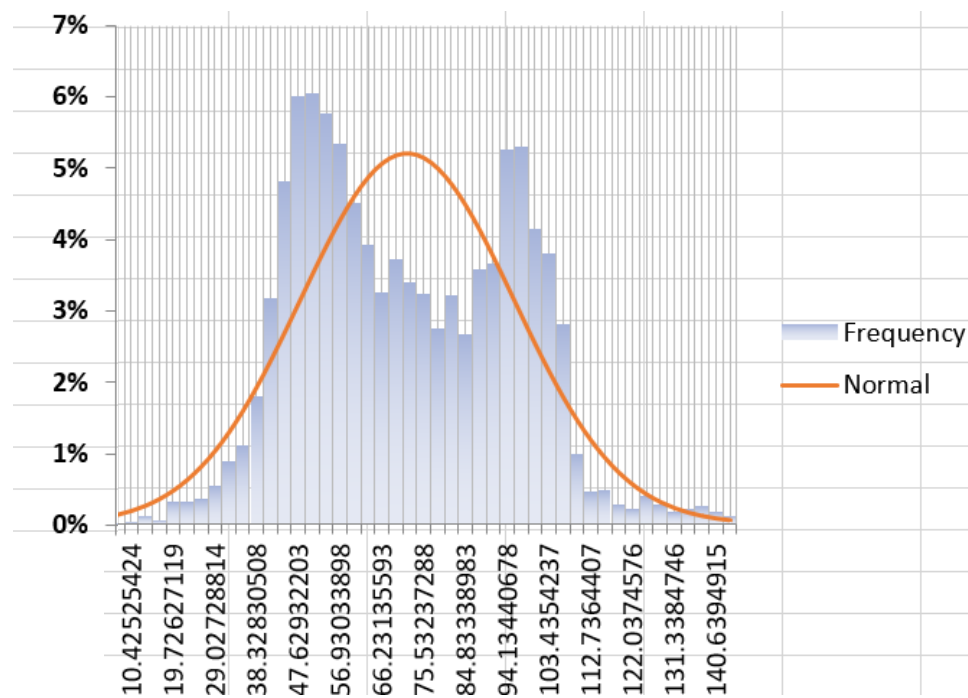
## Apêndice 1

		#Total	3523			
		Média	71.74633267	Desvio-Padrão	23.71181487	
		Mínimo (exc. (-37.63))	10.01	Máximo	145.29	
		Alcance	182.92	Alcance (exc. (-37.63))	135.28	
Intervalo	Limite Inferior	Limite Superior	Centro	Frequência	Freq. Acumulada	Normal
1	2.67440678	5.774745763	4.224576271	0	0.000283849	0.000909
2	5.774745763	8.875084746	7.324915254	0	0.000283849	0.001308
3	8.875084746	11.97542373	10.42525424	0.000283849	0.000567698	0.001849
4	11.97542373	15.07576271	13.52559322	0.001135396	0.001703094	0.002569
5	15.07576271	18.17610169	16.6259322	0.000567698	0.002270792	0.00351
6	18.17610169	21.27644068	19.72627119	0.003122339	0.005393131	0.004714
7	21.27644068	24.37677966	22.82661017	0.003122339	0.00851547	0.006224
8	24.37677966	27.47711864	25.92694915	0.003690037	0.012205507	0.008079
9	27.47711864	30.57745763	29.02728814	0.005393131	0.017598638	0.01031
10	30.57745763	33.67779661	32.12762712	0.008799319	0.026397956	0.012933
11	33.67779661	36.77813559	35.2279661	0.011070111	0.037468067	0.015949
12	36.77813559	39.87847458	38.32830508	0.017882487	0.055350554	0.019335
13	39.87847458	42.97881356	41.42864407	0.031791087	0.087141641	0.023044
14	42.97881356	46.07915254	44.52898305	0.048254329	0.135395969	0.026999
15	46.07915254	49.17949153	47.62932203	0.060175986	0.195571956	0.031098
16	49.17949153	52.27983051	50.72966102	0.060459835	0.256031791	0.035213
17	52.27983051	55.38016949	53.83	0.057621345	0.313653137	0.039197
18	55.38016949	58.48050847	56.93033898	0.053363611	0.367016747	0.042893
19	58.48050847	61.58084746	60.03067797	0.04513199	0.412148737	0.046144
20	61.58084746	64.68118644	63.13101695	0.039171161	0.451319898	0.0488
21	64.68118644	67.78152542	66.23135593	0.032642634	0.483962532	0.050736
22	67.78152542	70.88186441	69.33169492	0.037184218	0.52114675	0.051856
23	70.88186441	73.98220339	72.4320339	0.034061879	0.555208629	0.052103
24	73.98220339	77.08254237	75.53237288	0.032358785	0.587567414	0.051466
25	77.08254237	80.18288136	78.63271186	0.027533352	0.615100766	0.049975
26	80.18288136	83.28322034	81.73305085	0.032074936	0.647175703	0.047707
27	83.28322034	86.38355932	84.83338983	0.026681805	0.673857508	0.044771
28	86.38355932	89.48389831	87.93372881	0.035764973	0.709622481	0.041304
29	89.48389831	92.58423729	91.0340678	0.03661652	0.746239001	0.03746
30	92.58423729	95.68457627	94.13440678	0.052512064	0.798751064	0.0334
31	95.68457627	98.78491525	97.23474576	0.053079762	0.851830826	0.029275
32	98.78491525	101.8852542	100.3350847	0.041441953	0.893272779	0.025225
33	101.8852542	104.9855932	103.4354237	0.038035765	0.931308544	0.021368
34	104.9855932	108.0859322	106.5357627	0.02810105	0.959409594	0.017794
35	108.0859322	111.1862712	109.6361017	0.009934715	0.969344309	0.014567
36	111.1862712	114.2866102	112.7364407	0.004541584	0.973885893	0.011724

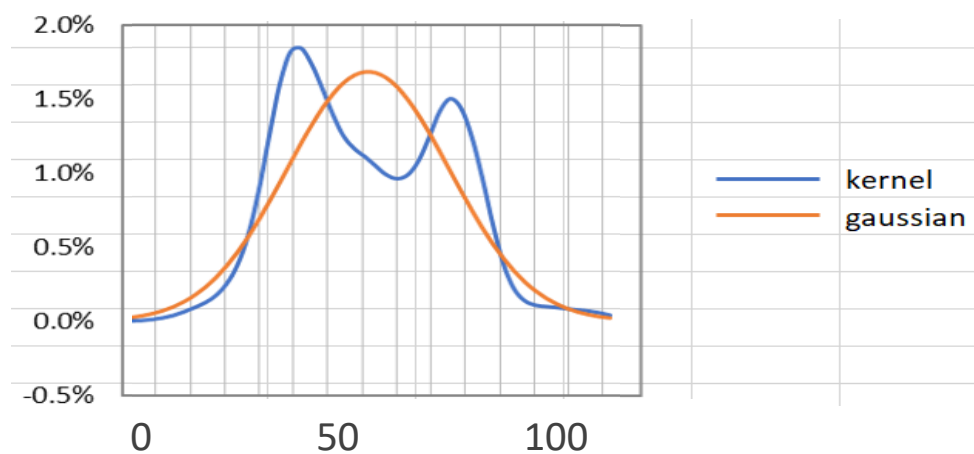
37	114.2866102	117.3869492	115.8367797	0.004825433	0.978711326	0.009275
38	117.3869492	120.4872881	118.9371186	0.00283849	0.981549815	0.007214
39	120.4872881	123.5876271	122.0374576	0.002270792	0.983820607	0.005516
40	123.5876271	126.6879661	125.1377966	0.003973886	0.987794493	0.004146
41	126.6879661	129.7883051	128.2381356	0.00283849	0.990632983	0.003064
42	129.7883051	132.8886441	131.3384746	0.001703094	0.992336077	0.002226
43	132.8886441	135.9889831	134.4388136	0.002270792	0.994606869	0.00159
44	135.9889831	139.089322	137.5391525	0.002554641	0.99716151	0.001116
45	139.089322	142.189661	140.6394915	0.001703094	0.998864604	0.00077
46	142.189661	145.29	143.7398305	0.001135396	1	0.000523

## Apêndice 2

Gráfico do Histograma e da função RND



### Apêndice 3



### Apêndice 4

	Intervalos	Kernel	Gaussian	Aversão ao Risco
1	2.67440678	1.04271E-05	0.000241746	0.043132388
2	5.774745763	4.02172E-05	0.000350799	0.11464477
3	8.875084746	0.000106124	0.000500418	0.212071012
4	11.97542373	0.000215017	0.00070175	0.306401448
5	15.07576271	0.000383073	0.000967404	0.395981016
6	18.17610169	0.000628147	0.001311017	0.479129407
7	21.27644068	0.000921797	0.001746564	0.527777474
8	24.37677966	0.001255001	0.002287368	0.548665789
9	27.47711864	0.001739138	0.002944849	0.590569582
10	30.57745763	0.002525762	0.003727051	0.677683939
11	33.67779661	0.003778682	0.004637063	0.814886901
12	36.77813559	0.005785945	0.005671476	1.020183326
13	39.87847458	0.008775536	0.006819061	1.286912557
14	42.97881356	0.012512736	0.008059879	1.552471943
15	46.07915254	0.016064081	0.009365001	1.715331565
16	49.17949153	0.018193881	0.010697013	1.700837564
17	52.27983051	0.018408309	0.012011372	1.532573379
18	55.38016949	0.017292411	0.013258614	1.304239709
19	58.48050847	0.015638527	0.014387291	1.086968091
20	61.58084746	0.013881108	0.015347419	0.904458816

21	64.68118644	0.012450394	0.016094113	0.773599244
22	67.78152542	0.011623082	0.016591061	0.700562927
23	70.88186441	0.011085418	0.016813443	0.659318714
24	73.98220339	0.01045836	0.01674999	0.624380074
25	77.08254237	0.009865031	0.016403928	0.601382234
26	80.18288136	0.009610472	0.015792706	0.608538632
27	83.28322034	0.00987041	0.01494654	0.660380938
28	86.38355932	0.010800364	0.013905934	0.77667303
29	89.48389831	0.012408058	0.012718476	0.975593194
30	92.58423729	0.014153582	0.011435242	1.237715986
31	95.68457627	0.015012544	0.010107205	1.48533096
32	98.78491525	0.014377299	0.008781974	1.637137484
33	101.8852542	0.012461938	0.007501164	1.661333906
34	104.9855932	0.009682911	0.00629855	1.537323873
35	108.0859322	0.006523783	0.005199096	1.254791639
36	111.1862712	0.003814936	0.004218816	0.904267044
37	114.2866102	0.002150588	0.003365338	0.639040729
38	117.3869492	0.001370773	0.002639017	0.519425551
39	120.4872881	0.00106778	0.002034375	0.524869002
40	123.5876271	0.000977175	0.001541684	0.633835868
41	126.6879661	0.000915807	0.001148511	0.797386778
42	129.7883051	0.000826043	0.000841105	0.982092865
43	132.8886441	0.000753463	0.000605537	1.244288906
44	135.9889831	0.000682564	0.000428555	1.592710711
45	139.089322	0.00055932	0.000298159	1.875913393
46	142.189661	0.000396916	0.000203922	1.946410564